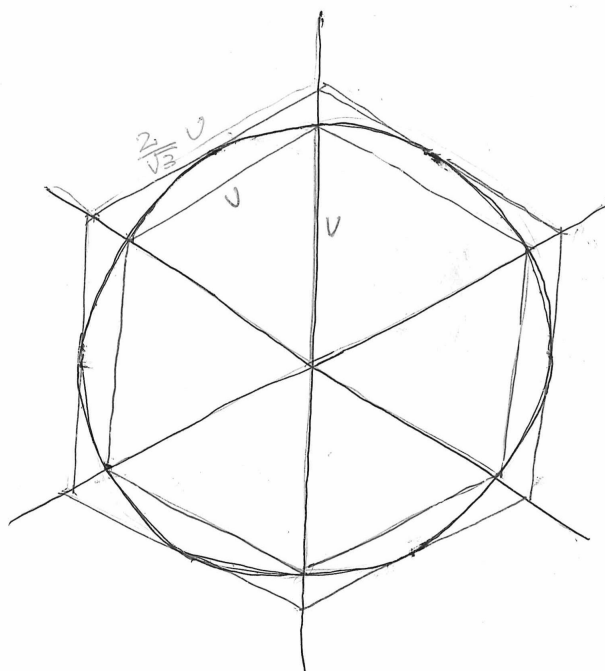


IL GIORNO DI π : LE RAGIONI DEL $3/14$ E QUELLE DEL $3/15$

NICOLA ARCOZZI

Quando c'è necessità di capire se una certa espressione contenente π è maggiore di una certa soglia, l'approssimazione $\pi_1 = 3$ è comoda nei calcoli a mano e spesso funziona bene. Geometricamente, essa corrisponde ad approssimare la lunghezza di una circonferenza di raggio u con il perimetro dell'esagono regolare inscritto, che misura $6u$ e che dà quindi un semiperimetro di $3u$. Avendo approssimato degli archi di circonferenza con corde ad essi sottese, abbiamo qui una approssimazione per difetto: abbiamo cioè perso della lunghezza.¹

Può essere interessante vedere cosa succede se invece approssimiamo la circonferenza con il perimetro dell'esagono regolare ad essa circoscritto, che misura $4\sqrt{3}u$. Questo ci dà una approssimazione per eccesso di π , che vale $\pi_2 = 2\sqrt{3} = 3.46410\dots$



Il "giorno del π greco" viene celebrato in data $3/14$ (secondo la convenzione USA: 14 marzo), cioè accreditando una approssimazione per difetto $\pi_3 = 3.14$. Però potremmo preferire l'approssimazione per eccesso $\pi_4 = 3.15$ e festeggiare invece il 15

¹Si ipotizza che il primo studio sistematico dell'inscrivibilità dei poligoni regolari in una circonferenza sia stato condotto da Melissa, allieva di Pitagora. Come in tutti i frequentissimi casi in cui nessuno scritto è arrivato sino a noi, si tratta di un dato molto incerto.

marzo. In questa chiacchierata confronteremo le ragioni dell'una dell'altra data e vedremo le gravi responsabilità che la scelta tra di esse comporta.

1. LE RAGIONI DEL 3/14

Il fatto che le approssimazioni per difetto, includendo $\pi_3 = 3.14$, riducano la circonferenza ha delle conseguenze geometriche. Fissiamo un capo di una corda di lunghezza u a un punto C , tendiamo la corda e giriamo attorno al punto C tenendola tesa. L'estremo libero A della corda traccia così una circonferenza γ , di cui ora misuriamo la lunghezza, che risulta essere $2pu$, con p positiva. Supponiamo che $p < \pi$: cosa è successo? Perché non abbiamo ottenuto $2\pi u$?

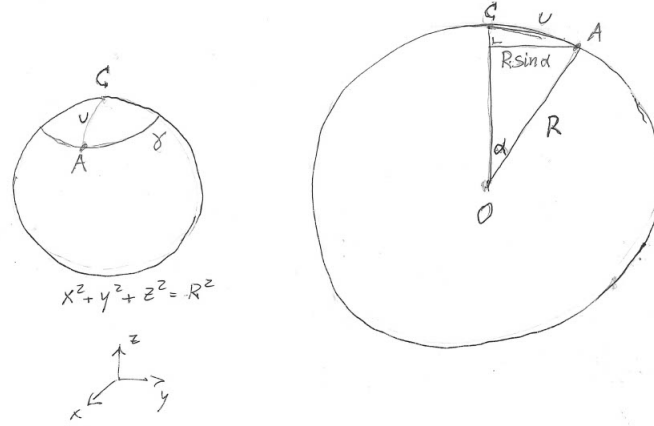
Una ipotesi è che viviamo non su un piano, ma su una sfera di raggio R e centro O e che su quella fissiamo punti e tendiamo corde. In questo caso u è la lunghezza di una geodetica sferica avente C come uno degli estremi. L'angolo COA misura $\alpha = \frac{u}{R}$ radianti, quindi la distanza tra la circonferenza γ e la retta OC misura $R \sin \alpha = R \sin\left(\frac{u}{R}\right)$. La sua lunghezza, quindi, vale (secondo le previsioni della geometria euclidea)

$$2\pi R \sin\left(\frac{u}{R}\right).$$

Vogliamo confrontare con la lunghezza $2\pi u$ della circonferenza euclidea di raggio u . Quello che osserviamo è che il valore per difetto p di π che otteniamo rimpiazzando la circonferenza euclidea con quella sulla sfera è

$$(1.1) \quad p = p\left(\frac{u}{R}\right) = \pi \frac{\sin\left(\frac{u}{R}\right)}{\frac{u}{R}} = \pi \operatorname{sinc}\left(\frac{u}{R}\right),$$

dove la funzione $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ (estendendo per continuità $\operatorname{sinc}(0) = 1$) è la funzione *seno cardinale*².



²Probabilmente avrete incontrato la funzione sinc come "un esempio di funzione integrabile, ma non assolutamente integrabile, in senso generalizzato". Essa svolge però un ruolo assai più importante in matematica (teoria di Fourier, analisi complessa) e nella teoria dei segnali, dove appare nella formula di campionamento/interpolazione di Nyquist-Shannon [7].

Abbiamo $0 \leq u \leq \pi R$, quindi $0 \leq x \leq \pi$: la funzione sinc decresce da 1 a 0. La conseguenza del tutto inaspettata per noi euclidei è che il rapporto tra circonferenza e raggio di una circonferenza dipende dal raggio u ! Se $u \sim 0$ è molto piccolo, allora $\text{sinc}\left(\frac{u}{R}\right) \sim 1$, quindi $p \sim \pi$. All'opposto, abbiamo il caso drammatico di $u = \pi R$, in cui la circonferenza si riduce al punto diametralmente opposto a C , che ha miserevole lunghezza nulla, cioè $p = 0$. Pensandoci su, non è così strano. Noi viviamo su una superficie approssimativamente sferica (raggio di circa 6.000 km), ma per circonferenze piccole come quella di una piazza circolare, ragioniamo come se vivessimo su una porzione di piano.

Detto altrimenti, sulla sfera di raggio R la geometria delle figure cambia quando si cambia dimensione: non abbiamo nessuna "invarianza per cambiamento di scala". Un triangolo equilatero che sta sulla superficie di una piazza non assomiglia affatto a uno avente un vertice al Polo Nord e gli altri due sull'Equatore. Questo ultimo, per esempio ha tre angoli retti!

Possiamo recuperare il caso euclideo ponendo $R = +\infty$ (facendo tendere R a $+\infty$, per stare nell'ortodossia). Al limite, tutti i raggi u sono "piccoli" e non si nota differenza qualitativa tra l'uno e l'altro.

2. LE RAGIONI DEL 3/15

Franz Taurinus (1794-1874) [8], uno dei pionieri della geometria non euclidea, propose una "terza geometria" oltre a quella sferica e a quella euclidea, in cui lo spazio (a due dimensioni) era la superficie di una sfera *con raggio immaginario*! Non credo che avesse molte figure da mostrare, ma certamente aveva molte formule, che a posteriori possiamo interpretare come un "modello analitico" (una "trigonometria") di una particolare geometria (quella iperbolica).

In maniera leggera e disimpegnata, vediamo cosa diventano le formule che abbiamo visto quando al posto di $R > 0$ sostituiamo iR . Ricordiamo innanzitutto la formule di Eulero per il seno:

$$(2.1) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

che vale per x reale. Ma noi porremo in (2.1) $x = \frac{u}{iR} = \frac{t}{i}$, un numero immaginario:

$$\sin\left(\frac{t}{i}\right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2i} = \frac{\sinh t}{i},$$

dove $\sinh$ è il *seno iperbolico*. Per quanto riguarda il sinc, abbiamo

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{i}\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{i}\right)}{\frac{t}{i}} = \frac{\sinh t}{t} = \frac{e^t - e^{-t}}{2t},$$

che potremmo chiamare, perché no?, *seno iperbolico cardinale* di t , $\text{sinhc}(t) = \frac{\sinh t}{t}$.

La circonferenza di raggio u nel piano di Taurinus con raggio iR dovrebbe dunque avere, se tutto va bene, lunghezza $2pu$, dove:

$$(2.2) \quad p = \pi \text{sinhc}\left(\frac{u}{R}\right).$$

Come nel caso sferico, il rapporto p tra lunghezza della circonferenza e diametro dipende da u e s'approssima a π (per R fissato) se $u \sim 0$: la geometria non è invariante per cambiamento di scala.

Le similitudini finiscono qui, perché

$$\sinh(t) > 1 \text{ se } t > 0, \sinh(t) \nearrow +\infty \text{ per } t \nearrow +\infty.$$

I valori di p , cioè, forniscono delle approssimazioni di π per eccesso, non per difetto. Non pare poi materializzarsi quel "limite antipodale" oltre il quale non sembra più avere molto senso parlare di circonferenze.

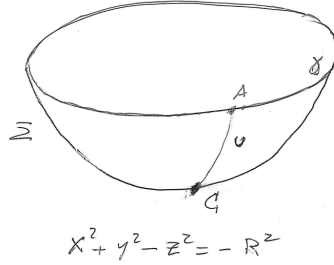
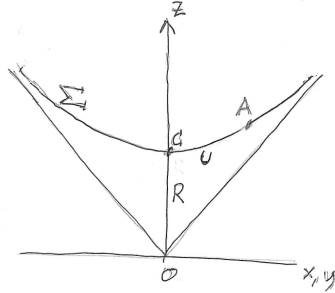
Incoraggiati dalla simmetria rispetto al caso sferico, cerchiamo un modello in cui queste circonferenze di grande lunghezza hanno una realtà più concreta. Seguendo Taurinus, cerchiamo una realizzazione della sfera con raggio iR in $\mathbb{R}^3$. Essa non può essere certo

$$x^2 + y^2 + z^2 = (iR)^2 = -R^2.$$

Negoziando sull'ontologia delle variabili, possiamo immaginare x, y reali (quelle che useremo per una mappatura della superficie) e sostituire z con iz , ottenendo quindi

$$(2.3) \quad x^2 + y^2 - z^2 = -R^2,$$

che rappresenta un iperboloide di rotazione a due falde Σ , di cui noi prenderemo quella con $z > 0$ ³.



Interpretiamo la formula (2.3) come un teorema di Pitagora immaginario. Per misurare le distanze sull'iperboloide, ne utilizziamo la versione infinitesima come elemento di lunghezza,

$$(2.4) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

³Perché non prendere invece $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$? Perché l'equazione non ha soluzioni per $x^2 + y^2 < R^2$, ma noi vogliamo avere a che fare con circonferenze di raggio piccolo nelle variabili spaziali.

Ciò vuol dire che la lunghezza di una curva $\gamma : \tau \mapsto (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$, $a \leq \tau \leq b$, verrà calcolata mediante la formula⁴

$$(2.5) \quad \int_{\gamma} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) + \dot{z}^2(\tau)} d\tau.$$

Abbiamo ora tutti gli strumenti per fare dei calcoli. Consideriamo su Σ il punto $C = (0, 0, R)$ e la circonferenza γ :

$$(2.6) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \tau \\ y = \rho \sin \tau \\ z = \sqrt{\rho^2 + R^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(\tau) = -\rho \sin \tau \\ \dot{y}(\tau) = \rho \cos \tau \\ \dot{z}(\tau) = 0 \end{cases}$$

con $0 \leq \tau \leq 2\pi$. Usiamo la formula (2.5) per calcolarne la lunghezza L ,

$$(2.7) \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2} d\tau = 2\pi\rho.$$

Vediamo ora la lunghezza del "raggio" che, su Σ , congiunge C con il punto $(\rho, 0, \sqrt{\rho^2 + R^2})$ di γ ,

$$(2.8) \quad \begin{cases} x = \tau \\ y = 0 \\ z = \sqrt{\tau^2 + R^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(\tau) = 1 \\ \dot{y}(\tau) = 0 \\ \dot{z}(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + R^2}} \end{cases},$$

con $0 \leq \tau \leq \rho$. La lunghezza u del raggio è quindi:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\rho} \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} d\tau \\ &= \int_0^{\rho} \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\tau^2 + R^2}} d\tau = \int_0^{\rho} \frac{R}{\sqrt{\tau^2 + R^2}} d\tau \\ &= R \int_0^{\rho/R} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} \\ &= R \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\rho}{R} \right), \end{aligned}$$

dove $\operatorname{arcsinh}$ è la funzione inversa del seno iperbolico.

Calcoliamo infine il rapporto p tra lunghezza di circonferenza e diametro,

$$(2.9) \quad p = \frac{2\pi\rho}{2R \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\rho}{R} \right)} = \pi \frac{\frac{\rho}{R}}{\operatorname{arcsinh} \left(\frac{\rho}{R} \right)} = \pi \frac{\sinh(u)}{u} = \pi \operatorname{sinc}(u),$$

in sorprendente accordo con la formula di Taurinus (2.2).

Tutto ciò è mirabilmente speculare a quanto visto nel caso della sfera, ma meglio ancora sarebbe riuscire ad ancorare queste definizioni e calcoli in una realtà visibile. Iniziamo con l'espressione (2.4) che abbiamo utilizzato per il calcolo delle lunghezze. Nella relatività speciale, se indichiamo con (x, y) variabili di posizione e con z la variabile temporale, scegliendo le unità di misura in modo che la velocità della luce sia $c = 1$, gli eventi (x, y, z) per cui $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$ parametrizzano punti (x, y) raggiungibili da $(0, 0)$ nell'intervallo temporale da 0 a z con velocità non superiore a quella della luce, ciò che include il nostro iperboloide Σ . La *metrica di Lorentz*

⁴Perché il calcolo abbia senso occorre che il vettore tangente alla curva stia fuori dal "cono luce": $\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) - \dot{z}^2(\tau) \geq 0$. Si parla in questo caso di vettore *di tipo spazio* (*space-like*). Notevole è che, se $\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau) - \dot{z}^2(\tau) = 0$ lungo la curva, questa ha lunghezza nulla!

(2.4) è una misura di quanto due eventi nello spazio-tempo sono lontani dall'essere raggiungibili con un raggio di luce (la positività di ds^2 impone che la distanza $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ da percorrere sia superiore a quella $\sqrt{dz^2}$ che può essere percorsa alla velocità della luce). Due punti su Σ hanno distanza di Lorentz positiva.

La metrica (2.4) è invariante rispetto a un gruppo di trasformazioni. Le *trasformazioni di Lorentz*, il sottogruppo di quelle che fissano l'origine, mappa Σ in sé. Non solo: rispetto all'azione del gruppo, Σ è *omogeneo* (ogni punto dello spazio è come ogni altro: posso andare da ogni punto a ogni altro con una trasformazione di Lorentz) e *isotropo* (ogni direzione è come ogni altra: fissato un punto di Σ e due direzioni uscenti da esso, c'è una trasformazione di Lorentz che lo fissa e che ruota una direzione nell'altra). Ciò determina, a meno di una costante, Σ tra le superfici dotate di una nozione di lunghezza. Quella costante, la *curvatura*, è $-\frac{1}{R}$, l'inverso del reciproco del raggio immaginario iR . La superficie Σ , con la metrica (2.4), è un *piano iperbolico*! Vedremo più in dettaglio alcune di queste affermazioni nell'appendice.

La presenza dell'esponenziale reale nella definizione del seno iperbolico, quindi nella formula per il calcolo della lunghezza della circonferenza di raggio u ,

$$2\pi \sinh u = 2\pi \frac{e^u - e^{-u}}{2} \sim_{u \rightarrow +\infty} \pi e^u,$$

implica che la lunghezza della circonferenza cresce esponenzialmente col raggio. La stessa cosa accade con l'area del cerchio. Se volete saperne di più, una rapida e deliziosa introduzione a questo insieme di fenomeni è [10] (ma forse volete iniziare da Wikipedia [9]).

3. QUALCHE NOTA STORICA E CRITICA SENZA NESSUNA PRETESA

- Mettendoci nel familiare mondo $3d$, se la lunghezza di una circonferenza di raggio u fosse $2pu$ con $p < \pi$ e se l'universo fosse omogeneo e isotropo, esso avrebbe geometria sferica e, in particolare, sarebbe finito (limitato). Se fosse invece $p > \pi$, avrebbe geometria iperbolica e sarebbe infinito. In entrambi i casi, celata alla nostra vista, ma accessibile all'osservazione astronomica, emergerebbe una lunghezza universale $\pm R$, il *raggio di curvatura dell'universo*. Pare che Gauss, avendo sviluppato nei suoi taccuini la geometria iperbolica, cercasse poi nelle tavole geografiche e astronomiche un indizio che l'universo avesse geometria curva, così da avere una lunghezza universale; così come, dopo Einstein, sappiamo di avere una velocità universale, quella della luce. A oggi, i dati in nostro possesso puntano a un universo che, sulle grandi scale, è piatto, $p = \pi$. (Localmente c'è la curvatura causata dalla massa, secondo la relatività generale).
- Per secoli s'è cercato di ottenere una *quadratura del cerchio*, cioè la costruzione con riga e compasso di un segmento di lunghezza pari a quella di una circonferenza di ugual raggio. Ciò sarebbe ovviamente possibile se π fosse razionale. Che non lo sia fu dimostrato verso il 1760 da Lambert [4]. Rimarrebbe una qualche speranza se π fosse algebrico (soluzione di una equazione polinomiale con coefficienti interi), ma la trascendenza di π fu dimostrata da Lindemann nel 1882 [5]. L'esistenza stessa di numeri trascendenti (che, dopo Cantor, può essere pigramente dedotta da considerazioni di cardinalità, insufficienti però a produrne anche un solo esempio)

era rimasto un problema aperto sino a Liouville [11], che aveva generato un numero troppo ben approssimabile da numeri razionali per essere algebrico.

- La conoscenza di valori approssimati di π ha grande utilità pratica e astronomica, e valori sempre più precisi vennero considerati da diverse civiltà, spesso indipendentemente l'una dall'altra. Dal punto di vista della speculazione pura, π è una costante innanzitutto perché il rapporto tra circonferenza e diametro non dipende dal raggio (abbiamo visto come ciò non sia per nulla scontato). Pare che sia dovuta ai greci la scoperta che lo stesso numero è il rapporto tra le aree del cerchio e del quadrato costruito sul raggio, ciò che rende π ancora più significativo. Da lì parte la caccia alle occorrenze imprevedibili di π , da a volume e area della sfera, alla iconica formula di Eulero

$$e^{\pi i} - 1 = 0,$$

al calcolo di $\zeta(2)$ ⁵,

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

eccetera.

- La plurimillenaria storia delle approssimazioni razionali di π ebbe una svolta con il lavoro del matematico e astronomo indiano Madhava (1340-1425) [1]. Egli produsse un numero di "serie di Taylor" per funzioni trigonometriche e trigonometriche inverse. In particolare, da quella per l'arcotangente,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

può essere ricavato il valore di $\frac{\pi}{4}$ ponendo $x = 1$. L'analisi matematica europea, che si sviluppò due secoli e mezzo dopo, riscoprì indipendentemente questa formula (Gregory 1671, Leibniz 1673).

- Un'altra maniera per ottenere approssimazioni razionali di π è mediante il suo sviluppo in *frazione continua* [6]:

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}}$$

- I due modelli che abbiamo visto sono alquanto diversi tra loro. La sfera l'abbiamo immaginata in uno spazio euclideo tridimensionale, con tre coordinate spaziali, mentre l'iperboloide vive nello spazio di Lorentz, con due coordinate spaziali e una temporale. La differenza sta nella metrica. Che non esistano superfici lisce nello spazio euclideo tridimensionale aventi la geometria del piano iperbolico fu dimostrato da Hilbert. Che tali superfici esistano in spazi euclidei di dimensione maggiore a tre segue da un risultato generale di Nash.
- Diversi modelli visibili del piano iperbolico furono prodotti nel corso del XIX secolo da Riemann e Beltrami [10]. Il modello proiettivo di Beltrami-Klein, in particolare, si presta naturalmente ad essere interpretato in termini della sfera di raggio immaginario di Taurinus.

⁵La funzione ζ di Riemann, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, è un oggetto centrale nella teoria dei numeri primi.

- Ignaro di tutto ciò che abbiamo visto sopra, nel 1897 il parlamento dell'Indiana fu sul punto di approvare una legge che fissava il valore di π a $\pi_5 = 3.2$ [3]. La legge passò alla camera, ma il senato, sotto pressione di un professore di Purdue University, la bloccò a tempo indeterminato.

Lo stato USA si nota per razionalità unita ad approssimazione anche in altri aspetti. Il suo nome viene dall'avervi vissuto degli "indiani", lascito dell'ipotesi errata di Cristoforo Colombo riguardo all'approdo del suo viaggio di esplorazione (il North Dakota, al contrario, venne così chiamato per l'avervi vissuto il gruppo etno-linguistico dei Dakota). Mi diceva un collega dell'Indiana che la capitale Indianapolis fu posizionata nel "centro geografico" dello stato. Vi passa un fiume, che però si rivelò inadatto alla navigazione per via dei banchi di sabbia nel suo letto.

APPENDICE: LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

In elettromagnetismo e nella teoria della relatività ristretta hanno un ruolo importante le trasformazioni di Lorentz, quelle che fissano l'origine e che conservano l'elemento di lunghezza

$$(3.1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

Abbiamo autoritariamente detto che esse mappano $\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = -R^2\}$ in sé e Σ risulta essere, rispetto all'azione di G , omogeneo e isotropo. Verifichiamo questa affermazione.

Sicuramente l'espressione $x^2 + y^2 - z^2$ è fissata dalle rotazioni del piano (x, y) , rappresentate dalle matrici (rispetto alle coordinate (x, y, z)):

$$(3.2) \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $0 \leq \theta < 2\pi$. Quindi ciascuna R_θ fissa Σ e ds^2 (poiché è fissata $x^2 + y^2$, quindi anche la sua versione infinitesima $dx^2 + dy^2$).

Nel piano (x, z) possiamo fantasizzare che il ruolo delle funzioni trigonometriche sia svolto da quelle iperboliche. Invece della relazione $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ abbiamo $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ e abbiamo formule per calcolare sia le funzioni trigonometriche che quelle iperboliche per somme degli argomenti. Ragionando "per necessità" o, ancora meglio, per (pochi) tentativi e errori, arriviamo a

$$(3.3) \quad Q_\alpha = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & 0 & -\sinh \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \alpha & 0 & \cosh \alpha \end{pmatrix},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. La trasformazione Q_α non tocca la variabile y ed è facile verificare che

$$(\cosh(\alpha)x - \sinh(\alpha)z)^2 - (-\sinh(\alpha)x + \cosh(\alpha)z)^2 = x^2 - z^2.$$

Quindi, $Q_\alpha(\Sigma) = \Sigma$ e Q_α lascia ds^2 invariato.

Usando in successione (componendo) trasformazioni del tipo R_θ e Q_α possiamo andare da ogni punto A di Σ a ogni altro punto B di Σ e, fissando B , compiere una rotazione nel piano (x, y) . La superficie Σ , cioè, è omogenea e isotropa rispetto al gruppo delle trasformazioni di Lorentz.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Madhava su Wikipedia.
- [2] Le serie di Madhava su Wikipedia.
- [3] Il progetto di legge sul valore di π su Wikipedia.
- [4] Irrazionalità di π su Wikipedia.
- [5] Trascendenza di π su Wikipedia.
- [6] L'espansione di π in frazioni continue di Lord Brouncker, di Michael Hirschhorn.
- [7] Il teorema di campionamento di Nyquist-Shannon su Wikipedia.
- [8] Franz Taurinus su Wikipedia.
- [9] Geometria iperbolica su Wikipedia.
- [10] James Cannon, William Floyd, Richard Kenyon, Walter Parry Hyperbolic Geometry, Flavors of Geometry MSRI Publications Volume 31, 1997.
- [11] Transcendental number su Wikipedia.